Dominique LAHANIER-REUTER

APPROCHES ANTHROPOLOGIQUES ET ETHNOLOGIQUES DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

Résumé : Dans cet article, nous tentons de rendre compte, au travers des traces relevées et étudiées, des activités que les ethnologues et anthropologues désignent comme mathématiques. Selon qu'il s'agit plutôt de reconstruire des pratiques quotidiennes, des activités conceptuelles ou les structures convoquées et mises en œuvre, les recherches présentées montrent la multiplicité des points de vue et des approches et, en retour, des questions qu'elles permettent ainsi de soulever.

Mots-clés : activité mathématique, pratiques, structures numériques, ethnomathématiques.

Le but de l'article est de présenter des résultats de recherches anthropologiques et ethnologiques qui interrogent l'activité mathématique. Il s'agit là par conséquent d'adopter une position de construction de l'état d'une question.

La problématique dans laquelle nous nous inscrivons pour interroger ces recherches est double : tout d'abord la diversité des positions adoptées dans ces domaines et celles des analyses menées nous conduisent à préciser et à questionner les dimensions retenues de l'activité mathématique. Dans un second temps, les études sur lesquelles nous nous appuyons nous amènent à soulever des questions qui ne nous semblent pas dénuées de pertinence pour comprendre et analyser des situations scolaires où une activité mathématique est exigée des élèves.

Pour saisir cette diversité annoncée des recherches dont nous essayons de rendre compte ici, nous nous proposons de partir des objets d'étude, des traces recueillies et du statut des descriptions mathématiques qu'elles donnent de ces traces.

Il nous est alors apparu possible de discerner trois positions différentes de recherche :

La première se donne pour but d'étudier « les institutions numériques » en tant que phénomènes culturels. Les champs interrogés sont, dans ce cas, les champs de l'activité humaine qui sont structurés par le nombre : la mesure du temps, la monnaie, les mesures agraires, mais aussi la musique, les jeux, l'architecture… L'objectif du chercheur est de reconstruire les structures numériques qui seraient spécifiques à chaque culture dans chacune des catégories de l'activité humaine étudiée. Les traces recueillies seront les désignations du nombre, les unités de mesure, les rapports arithmétiques qui les lient. Ces structures numériques ainsi identifiées, qui composent ce que nous appelons la description mathématique des traces, diront alors ce que sont les usages du nombre, de la mesure, dans des cultures différentes.

La seconde position cherche plutôt à rendre compte de pratiques effectives, quotidiennes, des mathématiques. Les traces recueillies et analysées seront alors des discours, des gestes observés auprès d'individus dans des situations aussi diverses que celles des hésitations de consommateurs dans un supermarché, des essais de suivis de régimes précisément mesurés, etc. La description mathématique tentera ici de reproduire les procédures engagées par des individus dans des situations où des problèmes (quel produit choisir ? Combien dois je payer ?) sont susceptibles d'être résolus par des opérations de mesure ou de calcul.

La troisième position enfin se propose d'identifier des « activités mathématiques telles qu'elles sont pratiquées dans des populations qui sont dites sans écriture ». Les matériaux examinés seront dans ce dernier cas des ensembles de signes : décorations, tissages, mais aussi les pratiques qui les définissent. Les chercheurs engagés dans ces études d'ethnomathématiques tentent de mettre en évidence, au travers des contraintes respectées par ces signes, au travers des catégories qui les définissent, des opérations de conceptualisation. La description mathématique qui peut en être faite sera convoquée à double titre : elle amènera une « preuve » qu'il s'agit bien là d'activité mathématique conceptuelle, au sens où nous, occidentaux, l'entendons. Mais elle sera aussi construite comme n'étant qu'une autre expression possible de ce concept.

Nous présenterons successivement ces trois orientations, en tentant tout d'abord d'étayer la présentation succincte qui vient d'en être faite, puis en essayant de comprendre les effets éventuels que ces positions de recherche ont eu sur l'enseignement des mathématiques.

1 — DESCRIPTIONS EN TERMES DE STRUCTURES NUMERIQUES

Comme il l'a été dit plus haut, nous commencerons par développer certaines recherches anthropologiques qui présentent une reconstruction systématique des structures mathématiques des quantités gérées au cours de différentes activités humaines qui peuvent être communes à un grand nombre de cultures. Nous disposons ainsi d'études comparatives des structures des « noms de nombres », de celles organisant la monnaie et la mesure du temps. Ces structures numériques sont, pour le chercheur, des indices de savoirs et de connaissances mathématiques : indices en ce que ces structures disent des savoirs mis en jeu pour les produire, mais aussi en ce qu'elles disent des savoirs possibles à construire. Le système des unités de temps révèle parfois une activité mathématique de modélisation tandis qu'un système de mots-nombres fini (qui ne peut donc rendre compte de toutes les quantités) peut tout aussi bien interdire certains dénombrements.

Nous avons retenu, dans le cadre de cet article, deux thèmes qui nous paraissent particulièrement intéressants, en ce qu'ils font référence à des thèmes centraux de l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire.

1.1. Les systèmes des « mots-nombres »

Les « mots-nombres » rendent compte de la série des nombres entiers : « un », « deux », « trois » etc.[1]. Cette série des nombres entiers (et non forcément celles des « mots-nombres ») est infinie. D'un point de vue mathématique, deux structures principales déterminent cet ensemble : l'une est d'ordre multiplicatif, la seconde d'ordre additif. En effet, les entiers sont en quelque sorte générés multiplicativement, puisque tout nombre entier peut se décomposer en un produit de nombres qui lui sont inférieurs ou égaux. D'un autre côté, ces mêmes entiers sont engendrés additivement, puisque tout entier peut se définir comme « son prédécesseur augmenté de un ».

Qu'en est-il des « mots-nombres » du point de vue lexical ?

Il est à souligner que toutes les langues connues comportent des mots-nombres. Mais, du point de vue lexical, il existe une diversité presque infinie de ce vocabulaire numérique. Cette diversité peut s'expliquer par le fait que, « dans aucune langue, la représentation des nombres ne s'effectue à l'aide d'un phonème unique » (Crump 1995 : 71). Toute langue comporte en effet, une collection de « mots-nombres », sans aucun rapport entre eux, qui, par combinaison, engendrent une suite de « mots-nombres » : en français, les « mots-nombres » « un », « deux », « dix », « vingt », « cent », « mille », « million », par exemple, permettent, en se combinant de former tous les « mots-nombres » nécessaires. Il peut se faire qu'une langue ne comporte que quelques mots-nombres : ainsi les Tongas, en Afrique du Sud, possèdent les mots-nombres de « un » à « cinq » et « dix » et « cent ». Cependant, dès qu'une langue permet de rendre compte de « tous » les nombres, il est intéressant de souligner que les modèles de formation des mots-nombres sont des modèles alliant des structures multiplicatives et des structures additives ou soustractives (Ifrah 1981). Nous ne citerons ici, comme exemple, que la formation du mot-nombre « huit mille deux cent trente-six ». Ce mot-nombre est formé à l'aide de deux classes de morphèmes : la première est celle « mille », « cent », « trente » qui représente les puissances successives de dix. La seconde est celle des morphèmes représentant les nombres de « un » à « neuf » inclus. La formation des mots-nombres est ici une formation de type polynomial. Ces résultats permettent surtout de désigner les anomalies, c'est-à-dire, sans doute, les survivances lexicales de systèmes plus anciens : « quatre-vingt quatorze » fournit un exemple d'une telle anomalie.

Ces descriptions des systèmes de formations de mots-nombres ne doivent pas laisser ignorer que dans un certain nombre de langues, des mots-nombres ordinaux sont également présents : le premier, le deuxième, le troisième etc. Certes, il est intéressant de penser la fonction particulière de ces mots-nombres ordinaux, à savoir

[1] Selon les cas, elle peut débuter à « zéro » ou non.

qu'ils dénotent ce à quoi ils se réfèrent au contraire des mots-nombres cardinaux. Elle permet en retour d'identifier les suites de mots qui évitent, dans certaines cultures, des implications liées au rang : pourquoi lundi, mardi etc. et non pas le premier jour, le second jour comme dans d'autres calendriers ? Il nous paraît cependant plus intéressant ici d'utiliser cette différence entre mots-nombres cardinaux et mots-nombres ordinaux pour interroger la formation des mots-nombres de fractions : « cinq douzièmes » ne rend peut-être pas compte de la même conception de « 5/12 » que « cinq sur douze » (Adjage et Pluvinage 2000).

Ces études menées sur les mots-nombres mettent en lumière des principes de combinaison de phonèmes de base. Si ces combinaisons ne heurtent pas les principes mathématiques qui régissent l'ensemble des entiers, elles ne les reproduisent pourtant pas. En montrant aussi que le dire et les façons de dire les nombres, qui ancrent certains de nos savoirs numériques, sont différents d'une langue à l'autre, ces études montrent à quel point les usages du nombre sont culturels. Ce résultat va se trouver amplifié par l'étude des divers systèmes de mesure.

1.2. Des systèmes de mesure

Nous essayerons d'illustrer trois résultats comportant la description des structures numériques d'unités de mesure. En premier lieu, faire état de la diversité culturelle de ces structures lorsque le système des unités de mesure décrit se rapporte à une même grandeur. Nous avons choisi dans le cadre de cet article les unités de mesure du temps. En second lieu, attester des tensions, à l'intérieur d'une même culture, entre des systèmes de mesure relatifs à des grandeurs différentes. C'est l'exemple du temps et de l'argent, et de leurs correspondances parfois délicates qui a été retenu. Enfin, déceler des tensions entre systèmes de mesure rapportés à une même grandeur, selon les pratiques dans lesquelles ces systèmes se trouvent engagés. Ce dernier point est illustré par la mise en évidence de systèmes de mesure d'aires concurrents.

L'exemple des unités de mesure du temps et de leur structure numérique atteste en effet la diversité culturelle des unités de mesure relatives à une même grandeur. Certains peuples (tels les Papous Kapauchu) n'éprouvent pas le besoin de mesurer le temps. D'autres le quantifient, ou l'ont quantifié, en se fondant sur des observations astronomiques : les calendriers chaldéo-assyriens, romains, etc., ont été construits avec le souci de faire coïncider les dates « avec les événements périodiques célestes » (Rey 1930 :289). Qu'il s'agisse de calendriers lunaires ou solaires, on conçoit la complexité de la structure numérique unissant la succession des mois, des jours et des années. D'autres encore ont développé des calendriers à partir d'exigences plus politiques. Le calendrier érigé par Clisthène propose des divisions de l'année administrative « en dix périodes de 36 ou 37 jours, correspondant à chacune des dix tribus [réunissant les citoyens d'Athènes ; Ainsi] au cours de ces dix périodes de l'année, à tour de rôle, chaque tribu formait la commission permanente du Conseil » (Vernant 1962 : 99). D'autres enfin ont élaboré des calendriers dans lesquels on peut déceler des considérations d'ordre plus philosophique. Le calendrier chinois peut, en effet, être décrit en termes de cycles, cycles presque tous semblables et pourtant tous différents, en référence à l'idée fondamentale de la philosophie chinoise : « tout dure en se transformant ».

Ce que nous souhaitons souligner dans ce cas est tout d'abord cette multiplicité des descriptions mathématiques attachées aux structures numériques des éléments mis en jeu (jours, mois, années…). Cette multiplicité a une première conséquence : ce que l'on perçoit « dépend d'un temps et d'un cosmos définis non par la Nature, mais par une culture autochtone » (Crump 1995 : 168)[2]. Cependant, il faut ajouter le fait que ces descriptions mathématiques rendent compte d'activités mathématiques, identifiées comme telles. Il s'agit en effet de produire un système d'unités de mesure obéissant à des contraintes explicites, en conformité avec un modèle déterminé, que ce modèle soit issu de considérations d'ordre plutôt astronomiques, politiques ou philosophiques.

Cette dernière remarque permet de mieux comprendre la singularité des systèmes d'unités temporelles et par conséquent d'interroger les correspondances avec d'autres systèmes de mesure. Ces correspondances entre systèmes de mesure, effectivement, ne vont pas de soi. Il peut se faire que des systèmes de mesures relatives à des grandeurs différentes soient organisés selon des structures numériques divergentes. Il suffit de penser à notre système monétaire, de base 10, et à notre système de mesure du temps. Mais, si nous poursuivons cette recherche de correspondance entre unités monétaires et unités de temps, nous découvrons d'autres raisons de tensions entre ces deux systèmes. Il existe encore aujourd'hui des sociétés traditionnelles, en Colombie et en Zambie (Ortiz 1973, Watson 1958) par exemple, qui, si elles sont totalement habituées à l'usage de l'argent, excluent le travail de la sphère monétaire de l'échange : il est impossible de penser la conversion du temps en argent parce qu'une quantité de temps ne peut être reproduite ni conservée. Les biens matériels, au contraire, qui possèdent une identité durable, peuvent être échangés. Ces tensions mettent en lumière des croyances ou des représentations collectives qui font que des systèmes parallèles ne peuvent être mis en relation. Dans certaines cultures, on ne peut penser leur articulation.

Mais ces tensions peuvent apparaître également dès lors que deux systèmes de mesure associés à la même grandeur entrent en concurrence. Nous retiendrons l'exemple des unités de mesure des surfaces, telles qu'elles sont utilisées par les producteurs de canne à sucre du Nordeste (Brésil) (De Abreu 1995). Les unités de mesure utilisées par ces paysans sont les suivantes : le Braça (unité de longueur d'environ 2,20 m), le Cubo (qui se rapporte à la mesure d'un carré d'un Braça de côté) et le Conta (qui se rapporte à la mesure d'un carré de 10 Braças de côté). La structure numérique de ces unités de mesure est comparable à celle du système métrique enseigné à l'école. Mais, et la différence est d'importance, le Braça, contrairement au mètre, est indivisible. Ceci a une conséquence immédiate : les mesures effectuées par ces paysans ne peuvent être qu'entières. Cette contrainte suppose des

[2] L'auteur propose comme exemple de ces perceptions différentes, comme rencontres de deux systèmes temporels étrangers l'un à l'autre, la coïncidence des dates du vendredi saint 22 avril 1519 et de la date du « 9 vent » de l'année du « roseau », marque du retour de Quetzalcoatl, dans le calendrier aztèque. Cortès, vêtu de noir puisque c'était le vendredi saint, apparaît comme l'incarnation du dieu attendu.

pratiques de mesure, des relevés des terrains exploités, différentes des calculs correspondants effectués dans le cadre scolaire. On peut déjà supposer, avec G. De Abreu, que ceci ne sera pas sans incidence sur les représentations que les enfants de ces paysans construiront des mathématiques « des champs » et des mathématiques scolaires.

Ces tensions, ces différences d'usage que les activités, les cultures assignent au nombre ont en effet une conséquence importante : le statut accordé aux activités mathématiques et par là même le statut attribué aux « mathématiciens », aux praticiens, aux experts, dépendra étroitement de celui de l'activité sociale qui en révèle l'usage. Ainsi dans l'Europe médiévale, les mathématiques utilisées pour contrôler le calendrier, et avec elles les mathématiciens astrologues, jouissaient d'un statut supérieur à celles utilisées par les clercs et les marchands. Ainsi les paysans experts en mesures agraires jugeront leur activité mathématique à l'aune des mathématiques scolaires.

Par conséquent, les études anthropologiques et ethnologiques qui se donnent pour finalité la description des structures numériques qui organisent les quantifications dans certaines activités sociales mettent en lumière essentiellement la diversité de ces structures : ces descriptions, qui cherchent à rendre compte à la fois des désignations des unités et de leur syntaxe, mais aussi des liens arithmétiques qui les unissent, montrent la pluralité des usages du nombre. Elles prouvent, de plus, que cette diversité est culturelle. Au delà de ces résultats, ces études s'attardent sur le fait que les articulations entre les différents systèmes sont toujours à penser, à interroger, et que l'identité des structures numériques n'est pas pour autant une garantie suffisante à l'articulation entre les différents systèmes de mesure.

2 — DESCRIPTION DES PROCEDURES ENGAGEES : ANTHROPOLOGIE DES PRATIQUES NUMERIQUES

A la différence des études rapportées ci-dessus, certaines des recherches relevant d'une démarche anthropologique tentent de décrire des usages du nombre au travers des traces de pratiques effectives d'individus ou de groupes d'individus. Ces traces peuvent être multiples et avoir été observées dans des contextes divers. On peut relever les choix des combinaisons de cases dans une grille de loto, on peut écouter le consommateur hésitant entre deux produits apparemment identiques mais de prix différents dans un supermarché, on peut filmer les gestes de personnes au régime mesurant les quantités d'aliments autorisées, on peut lire les formules utilisées pour la mesure des champs par des paysans.

Chacune de ces traces est l'occasion, pour le chercheur, d'une reconstruction de la suite des actions engagées par les individus observés. Cette suite d'actions est ensuite interprétée comme une organisation d'actions contrôlée par des connaissances mathématiques. Par exemple, choisir comme combinaison les nombres 24, 42, 43, 44, 45, 46, 38 au loto[3] peut être interprété comme un choix délibéré de nombres

[3] Il faut choisir en fait sept cases numérotées de 1 à 50.

élevés et parfois successifs. On peut lire dans ce choix une stratégie qui s'appuierait sur la connaissance mathématique de l'équiprobabilité des tirages, mais aussi sur une connaissance d'un ordre très différent, celle des stratégies mises en place par les autres joueurs. En effet, la presse spécialisée rend compte des choix les plus fréquents, qui se portent à la fois sur les nombres peu élevés et qui évitent des numéros consécutifs. Ainsi, le choix évoqué plus haut peut-il également s'interpréter comme une trace de l'identification de l'espérance forte de gain que recèle cette combinaison. Par exemple, encore, J. Lave (1988) relève, dans les discours et les gestes de consommateurs, des comparaisons de prix de deux articles équivalents : l'un de prix P_1 et de poids Q_1, l'autre de prix P_2 et de poids Q_2. Certains opèrent par calcul du prix à l'unité (Q/P) et comparaison de ces prix à l'unité, tandis que d'autres comparent les rapports de poids et de prix : P_1/P_2 et Q_1/Q_2. Ces calculs révèlent des connaissances activées différentes quant à la proportionnalité des poids et des prix.

Enfin, G. De Abreu (1995) déchiffre les formules utilisées par les paysans brésiliens pour calculer l'aire d'une parcelle de forme quadrilatère : on additionne les longueurs de deux côtés opposés en divisant par deux chacune de ces sommes, puis on multiplie les nombres obtenus, soit $(a + b)/2 \times (c + d)/2$. Si la parcelle est triangulaire, on multiplie la moyenne des longueurs de deux côtés par la moitié de la longueur du côté restant, soit $(a + b)/2 x c/2$. « Certains paysans traitent le triangle comme s'il s'agissait d'une figure à 4 côtés, la longueur d'un des côtés étant définie comme égale à zéro » (De Abreu 1995). Dans ce cas encore, on peut interpréter ces actions comme sous-tendues par des connaissances de type mathématiques, à savoir la formule de l'aire d'un rectangle, et les conditions d'approximations d'un calcul.

Une question va retenir les auteurs de ces études : quelle est la légitimité à interpréter ces traces en tant que manifestation de savoirs et de compétences mathématiques stables et permanents des individus ? En effet, il est délicat de décider du statut des connaissances mathématiques, telles qu'elles ont pu être déchiffrées au travers des actions des individus observés. Ces traces peuvent être reconstruites en terme d'inventions de procédures nouvelles, requises par la situation au cours de laquelle à été menée l'étude. En particulier, lorsqu'il s'agit d'actions accompagnées de discours explicatifs à l'intention de l'observateur, ces traces sont peut-être aussi des traces d'une action de réflexion sur les pratiques antérieures, ou des jugements de valeur sur les pratiques effectives.

Cette question va amener deux sortes de conclusions qui ont des incidences conséquentes sur les recherches didactiques, cette fois tournées vers les interprétations des procédures mises en place par des élèves en situation de classe. La première de ces conclusions est l'imbrication inextricable des procédures engagées, des actions des individus et du « contexte » dans lequel ces procédures sont mobilisées. Nous n'en donnerons ici qu'un seul exemple. Lors de soldes, des chemises (de prix identiques) étaient vendues « avec 50 % de réduction ». Une personne se rend à la caisse avec deux de ces chemises. La vendeuse enregistre alors deux fois de suite le même prix et le même rabais. La nécessité d'enregistrer le nombre d'articles vendus empêche d'identifier le prix des deux chemises comme étant celui d'une des chemises avant réduction. C'est le contexte économique de cette situation qui donne forme à la procédure engagée et qui prévient toute autre procédure de calcul. Ainsi, il est pratiquement impossible d'analyser des procédures sans chercher à comprendre comment le contexte particulier de la situation, de la tâche à réaliser pèse sur ces dernières. Il nous semble par conséquent difficile de pouvoir décréter ce que sont les connaissances mathématiques disponibles d'un élève au vu de quelques résolution d'exercices.

La deuxième conclusion à laquelle parviennent aussi les études de ce type est que les descriptions en termes de connaissances mathématiques des procédures identifiées supposent des réponses à des problèmes, ou des essais de réponses. Or, dans les situations de la vie quotidienne extrascolaire qui sont ici observées, ce ne sont pas toujours des problèmes que les individus rencontrent. Ce sont plutôt des dilemmes. L'individu peut certes hésiter, douter de sa démarche ou de son résultat, lorsqu'il est confronté à des nécessités comme celle d'acheter au meilleur prix, ou d'estimer de façon satisfaisante l'aire de la parcelle qu'il cultive. Mais cela ne suffit pas, dans la vie de tous les jours, à assurer à ce conflit le statut de problème. En effet, pour lever ce doute ou cette incertitude, l'individu peut, parfois, avoir recours à des décisions qui ne sont pas d'ordre mathématique : c'est le cas par exemple de ce consommateur qui hésite devant deux flacons de Ketchup et qui, après avoir tenté de comparer leurs prix, finalement prend le plus petit « parce qu'il prendra moins de place et de toute façon ça suffit pour la semaine » (Lave 1988). La résolution apportée n'est pas à proprement parler une résolution de problèmes, mais bien plutôt la levée d'un dilemme.

Ce courant de recherches, centré sur l'observation de pratiques quotidiennes de calcul ou d'activités de mesure permet, nous semble-t-il, de s'interroger sur les pratiques scolaires correspondantes. Si ces études mettent en lumière le fait que ces activités sont structurées étroitement par le contexte dans lequel elles surgissent, ne devons nous pas également interroger le contexte dans lequel les activités scolaires sont exigées ou suscitées ? Quel est le poids par exemple de la structure institutionnelle dans laquelle l'activité mathématique prend sa place ? Quel est le poids de l'expérience individuelle de chaque élève ? Quelles sont les conditions pour qu'un problème énoncé en soit réellement un ? Quels savoirs sont institutionnalisés ? Toutes ces questions émergentes sont à l'heure actuelle centrales en didactique des mathématiques dans un courant de recherche qui se désigne lui aussi comme anthropologique[4].

3 — DESCRIPTION MATHEMATIQUE ET CONCEPTUALISATION

La dernière position de recherche convoquée ici est celle qui prend le nom d'ethnomathématiques. Ce courant de recherche se définit comme « l'étude des activités mathématiques dans des civilisations sans écriture » (Ascher 1998). Il s'agit là d'une position en rupture avec le paradigme de recherche. En effet, elle suppose tout d'abord que des concepts mathématiques puissent être élaborés et transmis sans le

[4] On pourra consulter les travaux en particulier d'Y. Chevallard et de G. Mercier.

recours à l'écriture. Comme le disent K. Schemla et S. Pahaut : [ce] « jugement qui assigne à des populations sans écriture une activité mathématique présente une contradiction interne intrinsèque »[5]. Elle suppose ensuite que ce corps de savoirs peut ne pas être circonscrit, identifié, comme il l'est dans notre civilisation. Enfin, elle suppose que ces savoirs puissent avoir été constitués sans qu'aucune filiation ne soit reconnue avec les savoirs mathématiques tels que nous les connaissons. Il n'y a pas trace de « contributions [passées] de ces civilisations aux connaissances aujourd'hui disponibles » (ibidem). L'enjeu de ces recherches est par conséquent crucial pour l'identification de la « gamme des signaux reconnaissables pour une activité mathématique » (ibidem) et par là même pour la définition de ce qu'est la mathématique et de ce qu'est une activité mathématique.

Les auteurs de ces études cherchent donc à prouver que l'on peut voir émerger des idées mathématiques dans des sociétés traditionnelles, idées qui sont originales dans leurs formes, leurs fonctionnements et leurs conceptualisations. Ils tentent ainsi de montrer que des idées et des concepts que nous tenons pour mathématiques se retrouvent effectivement dans ces sociétés, sans être regroupés ni isolés dans une catégorie « mathématique », qu'ils posent comme catégorie culturelle.

L'enjeu de ces études est donc d'identifier des idées que les mathématiciens, tels que nous les désignons, expriment dans un langage formalisé[6] au travers de représentations symboliques. En effet, l'expression des idées mathématiques dans des cultures traditionnelles sans écriture serait à chercher dans des ensembles de signes très différents de ceux que les mathématiciens ont élaborés. Les travaux d'ethomathématiques vont tout d'abord consister à relever des traces de ces représentations, au travers de décorations rituelles, de règles de jeux, etc. Les traces retenues sont celles qui sont produites de façon systématique : des jeux traditionnels, des décorations similaires, des tailles de pierre identiques… Nous retiendrons ici comme exemple celui des tracés des figures continues que M. Ascher a tout particulièrement travaillé.

Les traces relevées sont des décorations géométriques observées chez les Buschoong (Chefferie des régions limitrophes de l'Angola et du Congo), les tracés de figures continues dans le sable qui accompagnent et soutiennent les récits des Tsokuwe (peuple Bantu de même localisation que les Bushoong), des tracés de figures continues dans le sable liées aux mythes et aux rites dans l'île de Malekula (île des Nouvelles Hébrides, actuellement République de Vanuatu). Ces tracés sont effectivement systématiques dans ces cultures traditionnelles. Dans un premier temps, le chercheur tente de reconnaître dans ces productions des contraintes qui s'énoncent également dans les mathématiques que nous connaissons. Pour le cas étudié, il s'agit de tracer une courbe continue passant par des points imposés du plan. Les décorations géométriques des Bushoong sont constitués de motifs entrecroisés qui peuvent cependant se décrire comme une ligne continue et fermée (elle

[5] Karine Schlema & Serge Pahaut, Postface à Marcia Ascher (1998).

[6] Les travaux d'ethnomathématiques ne peuvent reconnaître que des idées déjà conceptualisées, légitimées par la communauté des mathématiciens.

revient à son point de départ). Les tracés dans le sable évoqués plus haut s'effectuent (et doivent s'effectuer) d'un seul mouvement, la ligne continue que trace le conteur encercle tour à tour les points initiaux qui figurent les personnages du récit. Ces tracés achevés sont donc bien des représentations de graphes, en ce qu'ils sont des « ensembles de points reliés ou non par des arêtes[7] ». Leurs productions répondent à l'un des problèmes premiers de cette théorie : « sur un graphe connexe peut-on mener un chemin continu qui passe une fois et une seule par chacune des arêtes du graphe ? ». Nous remarquerons que ce problème, tel qu'il est formulé, est le plus souvent accompagné, dans la littérature scientifique, de l'évocation du problème contextuel qui est reconnu avoir donné naissance à la théorie des graphes : le problème d'Euler, ou encore des ponts de Königsberg[8].

On peut donc constater que les problèmes (résolus) au cours des activités évoquées plus haut sont identiques aux problèmes identifiés comme fondateurs de la théorie des graphes. Il est d'autant plus intéressant de souligner que cette identité de problèmes ne paraît pas suffisante, aux yeux des chercheurs, pour conclure à la construction du concept de graphe dans ces sociétés traditionnelles. Certes, on a identifié des productions systématiques en ce qu'elles apparaissent comme des réponses à une question unique qui peut être considérée comme organisatrice de ces activités. Mais ces productions (ces tracés dans le sable), sont loin d'être tous identiques : on relève ainsi des tracés plus ou moins complexes, entourant un plus ou moins grand nombre de points, des tracés qui répondent à la question, d'autres qui n'y satisfont pas. L'étude de ces représentations symboliques va, à cet instant, se saisir des variations observées. Ces différences correspondent-elles à l'exigence de l'activité mathématique qui requiert une catégorisation explicite des produits de l'activité ou ne sont-elles perçues que comme des variations aléatoires ? Dans l'exemple développé, nous constatons effectivement des indices probants de cette catégorisation. En effet, dans les sociétés traditionnelles évoquées, deux tracés « isomorphes »[9] sont désignés par le même nom, alors même que leurs formes sont différentes. Réciproquement, à des tracés non isomorphes sont attachées des dénominations différentes. De plus, il y a non seulement une catégorisation conceptuelle de ces représentations, mais une recherche d'enrichissements de ces catégories par transformations et combinaisons, par ajout de contraintes supplémentaires. On peut ainsi relever des tracés dans le sable obtenus par rotations, symétries, de tracés initiaux, qui correspondent à autant de procédures combinées, transformées des procédures de tracés initiales.

---

[7] Plus précisément, un graphe est un « quadruplet (X, U, o, e) où X désigne un ensemble appelé ensemble des sommets du graphe, U un ensemble appelé ensemble des arcs du graphe, o une application de U dans X appelée origine, et e une application de U dans X appelée extrémité. » *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications* (1998).

[8] La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, en Russie) possédait sept ponts. Le problème posé est le suivant : est-il possible de parcourir la ville en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts et de revenir à son point de départ ? Une représentation du problème suppose d'assimiler les différentes parties de la ville à des points et les ponts à des arêtes. Il faut donc chercher à parcourir les arêtes d'un seul trait.

[9] Nous dirons que deux tracés sont isomorphes si les deux quadruplets les décrivant sont identiques.

La reconnaissance d'une activité mathématique de conceptualisation nécessite par conséquent, pour les chercheurs dont nous rapportons les travaux, l'identification d'une problématique commune à des ensembles de signes et, de plus, la lecture possible des variations de ces représentations comme étant systématisée.

Cette conclusion ne va pas sans interroger, en contre partie, certaines activités scolaires. Nous avons retenu comme exemple des exercices proposés en classe de sixième, dans les années quatre-vingt, qui eux aussi ont pour thème ces tracés de lignes continues (Deledicq et Lassave 1981). Le problème posé est encore une fois identique (« peux-tu tracer sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur le même trait les figures suivantes ? »). Cependant, en l'absence de productions originales de l'élève ou du groupe d'élèves, de telles figures, en l'absence en fait de variations contrôlées de ces productions, est-il possible d'espérer que l'activité des élèves est bien une activité mathématique de conceptualisation ? Quels types de connaissances ou de savoirs sont alors construits par les élèves ?

CONCLUSION

Les trois courants de recherche dont nous nous sommes faits l'écho apportent des éléments de réponse différents aux questions prépondérantes en anthropologie et en ethnologie : le recueil des traces et les descriptions à construire de ces traces. Chacun d'entre eux contribue, comme nous l'avons vu, à interroger les conditions d'entrée dans une activité mathématique, ainsi qu'à souligner à quel point nos connaissances sont définies culturellement. Nous proposerons, en guise de conclusion, de transposer quelque peu brutalement leurs domaines d'investigation propres à celui de l'institution scolaire, afin d'élaborer des questionnements qui sont à nos yeux autant de pistes de recherche. Il nous semble effectivement important, pour ne pas dire nécessaire, de tenter de rendre compte de la façon dont l'institution scolaire définit des usages du nombre, quelles pratiques et quelles connaissances elle décide de reconnaître et d'ignorer, quelles formes d'activités mathématiques elle privilégie. Ces explorations auraient pour but de mettre en relief les éventuelles divergences, ou les éventuelles coïncidences que présentent ces usages, ces pratiques, ces activités institutionnalisées avec ceux et celles que le monde à l'extérieur de l'école permet de construire ou de rencontrer. Mais ces explorations auraient également un autre rôle : celui de désigner les pratiques, les activités, les problématiques qui permettent de construire un sens mathématique. C'est dire l'importance que l'on peut accorder à ces études qui sont, pour une grande part, encore à venir.

Dominique LAHANIER-REUTER
THEODILE, EA 1764
Université Charles de Gaulle — Lille 3

Abstract : In this paper, we try to understand the means by which the ethnologic and anthropologic approach describe mathematics activities. Whether they intend to focus on every day practices or conceptual activities or numerical structured uses, these research display different points of view, and in regard as many questions.

Key words : mathematics activities, numerical structure, practices, ethno-mathematics.

Références bibliographiques

Adjage R. & PLUVINAGE F. (2000) « Un registre géométrique unidimensionel pour l'expression des rationnels » — *Recherche en Didactique des Mathématiques* 20/1. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ascher M. (1998) *Mathématiques d'ailleurs, nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles*, Paris : Le Seuil.

Chevallard Y. (1992) « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique » — *Recherche en Didactique des Mathématiques* 12/1. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Crump T. (1995) *Anthropologie des nombres, savoir-compter, cultures et sociétés*, Paris : Le Seuil.

De Abreu G. 1 (995) « Mathématiques paysannes » — *La Recherche* 278.

Deledicq A. & Lassave C. (1981) *Faire des mathématiques*. Paris : Nathan.

Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications (1998). Paris : Albin Michel.

Ifrah G. (1981) *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Seghers.

Jedrzejewski F. (1999) *Le nombre et la mesure*. Paris : Editions Diderot.

Lave J. (1988) *Cognition in practice*. Cambridge : Cambridge University Press.

Lefort J. (1998) *La saga des calendriers*. Paris : Bibliothèque Pour la science.

Ortiz S. (1973) *Uncertainties in peasant farming*. London : Athlone Press.

Rey A. (1930) *La science orientale avant les grecs*. Paris : La Renaissance du Livre.

Vernant J. P. (1962) *Les origines de la pensée grecque*. Paris : PUF.

Watson W. (1958) *Tribal cohesion in a money economy*î. Manchester : Manchester University Press.