Dominique DESCHARLES

UNE AIDE A LA COMPRÉHENSION DES PROBLÈMES SOUSTRACTIFS

L'activité mathématique, à l'école primaire, n'a pas pour seule fin la maîtrise des techniques opératoires, mais avant tout la résolution de problèmes. On constate parfois que des enfants dominant bien les mécanismes des opérations, se trouvent en échec devant des problèmes. Ces problèmes ont souvent des caractéristiques précises :

- description d'une situation,
- formulation d'une question (nécessitant un calcul),
- succession d'autres questions induisant l'ordre de résolution.

On peut invoquer plusieurs causes aux échecs rencontrés par les enfants : difficultés pour lire l'énoncé, difficultés face au « sens des opérations », absence d'apprentissage.

De plus, la réussite peut être déterminée par des verbes inducteurs (gagner, perdre…). Enfin la répétition, au cours de l'apprentissage, d'une même situation mais avec des « habillages différents » favorise la résolution. Il s'agit alors pour l'enfant de reconnaître la situation pour laquelle il a mémorisé une procédure de résolution. Il faut donc éviter le problème type.

En fait, qu'est-ce qu'un problème ? On trouve dans Ermel[1], cette définition : « Il y a problème dès qu'il y a réellement quelque chose à chercher que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule ».

Cet article s'intéressera tout particulièrement aux problèmes soustractifs. On rappellera tout d'abord la classification des problèmes de type additif élaborée par Gérard Vergnaud et les difficultés qu'ils suscitent chez les enfants. On présentera ensuite une démarche d'apprentissage d'aide à la compréhension des problèmes soustractifs. Cette démarche sera illustrée par des exemples de séquences vécues dans les classes. On verra que dans cet enseignement, l'interaction élève-élève joue un rôle déterminant qui permet à l'enfant de progresser.

---

[1] ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Cours Élémentaire. Tome 1. Paris, SERMAP OCDL.

I - RAPPEL DE LA CLASSIFICATION DES PROBLÈMES DE TYPE ADDITIF

Gérard Vergnaud a établi et décrit six catégories de relations additives[2]. Nous présentons succinctement ces problèmes, sans aborder les trois dernières catégories qui dépassent largement le cadre de l'école primaire.

Par « problèmes de type additif », il faut comprendre tous ceux dont la solution n'exige que des soustractions ou des additions. Chaque catégorie comprend des classes de problèmes.

I.1. - Première catégorie : Problèmes de composition d'états

Il s'agit ici de problèmes statiques de type : « Autour d'une table, il y a 9 enfants dont 5 garçons. Combien y a-t-il de filles ? »

I.2. - Deuxième catégorie : Problèmes de transformation d'états

Ce sont des problèmes dynamiques de type : « Paul a 6 billes. Il en perd 2. Combien lui en reste-t-il ? ». Dans ces problèmes, il y a un état initial (ici 6 billes) sur lequel on opère une transformation (il s'agit dans notre exemple d'une perte) afin d'obtenir un état final (ici 4 billes).

La question peut porter sur la recherche des 2 états (initial ou final) ou sur la recherche de la transformation.

I. 3. - Troisième catégorie : problèmes de relation d'états

Ce sont également des problèmes statiques de type : « Paul a 8 ans. Jacques a 5 ans de moins. Quel est son âge ? »

II - DIFFICULTÉS RENCONTRÉES CHEZ LES ENFANTS

Une expérimentation menée par Fischer[3] apporte des informations quant à la nature des difficultés rencontrées chez les enfants.

Nous résumons ici quelques-unes de ses conclusions ainsi que nos propres observations.

a) Il existe une hiérarchie entre les différentes catégories de problèmes. L'enfant comprend mieux les problèmes dynamiques pour lesquels il peut imaginer un déroulement d'action, que les problèmes statiques.

b) La réussite aux problèmes de composition d'états est liée à la maîtrise de l'inclusion.

---

[2] VERGNAUD G. *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne, Éd. Peter Lang.

[3] FISHER J.-P. (1979) *La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction*. Thèse de Troisième Cycle en didactique des mathématiques. Université de Nancy I.

L'enfant doit en effet être capable de distinguer la partie du tout. Dans les cas d'échec, il ne parvient qu'à opposer une partie à son complémentaire.

c) En ce qui concerne les problèmes de transformation d'états, la recherche de l'état final ne pose guère de difficultés. La recherche de la transformation et de l'état initial suscite moins de facilités. Illustrons ceci par deux exemples :

Recherche de la transformation

« Arnaud possède des images. Il en a 12. Son papa lui en donne. Maintenant il en a 16. Combien son papa lui en a-t-il donné ? » Le verbe « donner » incite l'enfant à effectuer une addition.

Recherche de l'état initial

« Jacques joue une partie de billes. A la fin de la partie, il a 9 billes. Durant la partie il en a gagné (ou perdu) 2. Combien avait-il de billes avant la partie ? »

On le voit, le calcul qu'implique la solution du problème est plus complexe. La solution implique l'inversion de la transformation.

d) Pour les problèmes de la troisième catégorie, on peut noter que les expressions « de plus, de moins » ne font pas forcément partie du langage des enfants.

Ces quelques conclusions montrent la nécessité de tenir compte de la diversité des problèmes et de leurs difficultés propres en débutant un apprentissage.

III - LE MOUVEMENT DIDACTIQUE ET LES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

A. La didactique des mathématiques est un courant de recherches sur l'apprentissage de cette matière. Ce mouvement est né dans les Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques (IREM) après 1968, notamment suite aux travaux d'observation conduits à l'IREM de Bordeaux. Le premier exposé relatif à une théorie des situations didactiques est celui qu'a fait Guy Brousseau en 1970 aux journées de l'Association des Professeurs de Mathématiques (APM) à Clermont-Ferrand.

La méthode didactique se caractérise par le souci d'obtenir de l'élève la construction de la connaissance selon une démarche qui lui est propre.

Cette méthode repose sur une analyse et une théorie des situations didactiques. Une situation didactique est « un ensemble de conditions et de relations implicites ou explicites entre l'élève, le milieu dans lequel il se trouve et un système éducatif » (Habiba El Bouazzaoui[4]).

La situation didactique comprend :

a - des situations-problèmes qui doivent permettre de modifier l'état de connaissances de l'enfant en lui donnant la possibilité d'utiliser des connaissances antérieures, de les modifier, de les compléter voire même de les rejeter pour construire des conceptions nouvelles. L'élève doit pouvoir établir des échanges avec la situation afin de modifier les tentatives qui ne conviennent pas.

b - un contrat didactique qui « régit les rapports entre le maître et l'élève et fixe les obligations de chacun ». Dans le contrat didactique, le maître ne peut pas dire à l'élève ce qu'il doit faire mais c'est à l'élève d'utiliser ses propres stratégies afin de résoudre le problème. D'une façon générale, les situations didactiques permettent à la connaissance d'être perçue par l'élève comme solution du problème dans lequel il s'est engagé.

Les principes évoqués par la didactique font appel aux analyses que J. Piaget fait de la formation des notions et opérations au cours du développement de l'enfant. Pour Piaget, une nouvelle conduite se trouve préparée par toute l'activité et les conceptions antérieures. Il faut que les connaissances que l'enfant doit acquérir soient construites par lui « en relation directe avec les opérations qu'il est capable de faire sur la réalité, avec les opérations qu'il est en mesure de saisir, de composer et de transformer avec les concepts qu'il construit progressivement ». (G. Vergnaud - Op. Cit.).

La connaissance se met en place en s'opposant à une autre sur laquelle elle s'appuie pour la compléter ou pour la remplacer.

B. Guy Brousseau a établi les types de situations didactiques. Il distingue quatre types de situations : les situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation.

Cette classification lui a permis de mettre en place un processus d'apprentissage dialectique en trois phases : phase de l'action, de la formulation et de la validation.

1 - Les situations d'action

L'enfant est placé devant une situation qui pose problème et dont la solution est la connaissance à enseigner. Il doit pouvoir agir sur la situation et celle-ci doit pouvoir lui renvoyer de l'information. Il peut ainsi juger du résultat de son action et changer éventuellement ses tentatives.

Le caractère dialectique de l'apprentissage s'inscrit dans cet aller-retour entre l'enfant et la situation.

---

[4] EL BOUAZZAOUI H. (1982). *Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*. Thèse de Troisième Cycle en didactique des mathématiques. Bordeaux.

EXEMPLE 1 : Un élève A dispose d'un ensemble de stylos. Il doit aller chercher ses capuchons et les préparer pour ses stylos. Il doit ensuite vérifier s'il ne s'est pas trompé.

2 - Les situations de formulation

L'enfant est amené à formuler et à donner une signification aux formulations. Il doit prendre conscience qu'il fournit des informations à un autre sujet dans le but que ce dernier agisse sur la situation. Le caractère dialectique apparaît dans le dialogue qui s'instaure entre la situation, l'émetteur et le récepteur. L'émetteur met à l'épreuve et contrôle le vocabulaire qu'il emploie. Il lui donne ainsi du sens. Chaque fois que l'action du récepteur sur la situation n'est pas satisfaisante, de nouveaux messages sont échangés.

EXEMPLE 2 : L'élève A ayant un ensemble de stylos doit commander par écrit à un autre élève B des capuchons pour chacun de ses stylos. L'élève B ayant constitué sa collection, il peut vérifier avec A soit la validité du message, soit la validité de son action.

3 - Les situations de validation

Les situations de validation permettent à l'enfant d'exposer ses convictions ou d'en accepter d'autres. A travers ces échanges, une dialectique se réalise. Chaque enfant peut demander des explications supplémentaires, refuser celles qu'il ne comprend pas ou celles avec lesquelles il n'est pas d'accord.

Dans l'exemple 2, la classe peut être amenée à :

- supprimer des messages trop longs,
- supprimer des représentations,
- garder des messages de type 15 ou 7, 3, 5.

La validation peut intervenir dans les situations de formulation.

C. Les composantes d'une situation didactique

1 - Le maître

Le maître met en place les situations où l'enfant peut acquérir de nouvelles notions. Il veille par le choix des situations à ce que la recherche de la solution soit orientée dans la direction voulue. Dans la phase de validation, il intervient dans l'organisation, dans la formulation des propositions et pose éventuellement des questions. « Le maître doit observer les modèles mobilisés par l'élève pour proposer d'autres activités pertinentes quant à l'évolution souhaitée »[5].

2 - Les variables didactiques

A partir d'une situation d'apprentissage, le maître doit trouver les variables qui sont intéressantes pour l'appropriation de la connaissance.

Une variable est didactique si elle change la procédure de résolution. « En agissant sur

---

[5] DERAMECOURT G., OLEJNICZAK E., MARTIN F. (1984). *Maths CP* - IREM Bordeaux.

elles, on pourra provoquer des adaptations, des régulations, des apprentissages »[6].

Dans l'exemple cité ci-dessus, les variables peuvent être :

- le nombre de stylos,

- la distance (la correspondance terme à terme ne peut-être utilisée si les capuchons sont éloignés des stylos).

D. Au cours de ses échanges, l'enfant construit sa réaction en rapport avec le problème posé. Il utilise un ensemble de règles et de connaissances. Cet ensemble est appelé « modèle ». Ce modèle est en fait ce qu'utilise l'enfant pour prendre sa décision.

On distingue le modèle implicite et le modèle explicite :

1 - Le modèle implicite

Ce sont des réactions que l'enfant ne peut ni formuler, ni organiser en une théorie. Il se manifeste dans des situations d'action.

Exemple : pour calculer 5 + 3, l'enfant peut :

- compter sur ses doigts,
- compter mentalement,
- compter 5 doigts et dire 6, 7, 8.

2 - Le modèle explicite

Ce sont les règles que l'enfant sait formuler. Il se manifeste dans des situations de formulation et de validation.

Que le modèle soit implicite ou explicite, il existe trois types de modèles :

• *le modèle de base*

C'est le préalable pour que l'enfant puisse s'investir dans la situation. Dans notre exemple des capuchons, l'enfant doit comprendre qu'il faut commander des capuchons, en demander autant que de stylos.

• *le modèle de résolution*

C'est une règle de comportement qui permet à l'enfant de fournir une solution juste. Dans l'exemple 2, un des modèles consiste à dessiner autant de capuchons qu'il y a de stylos.

• *le modèle de contrôle*

L'enfant doit pouvoir juger de son efficacité sans attendre la correction du maître.

Le modèle de contrôle doit être direct et simple. Dans notre exemple, il s'agira de vérifier que l'on peut poser un capuchon sur chaque stylo.

---

[6] Article de BROUSSEAU G. *Les objets de la didactique des mathématiques. - Contribution à la seconde école d'été de didactique des mathématiques Olivet 5 - 17 juillet 82* édité par l'IREM d'Orléans.

Voici, résumés, les principaux traits du mouvement didactique. Nous présentons maintenant des situations d'apprentissage inspirées par ce courant.

IV - UN EXEMPLE D'APPRENTISSAGE

Les exemples qui vont suivre sont le résumé d'un apprentissage effectué en classe de perfectionnement. L'objectif de cet enseignement était de mettre en place des situations visant à amener l'enfant à la résolution de problèmes soustractifs. Nous avons choisi de présenter ici des situations de formulation, les situations d'action ayant été vécues précédemment.

A - Présentation de la situation de formulation

Un problème de composition d'états a été transformé en situation-problème.

« Sur une feuille, on a dessiné un nombre X de fleurs dont Y sont coloriées. Combien y a-t-il de fleurs non coloriées ? »

On transforme cet énoncé en situation-problème. Pour que l'enfant puisse agir sur un matériel, on remplace les fleurs de l'énoncé par des gommettes.

Chaque enfant A dispose d'une feuille sur laquelle est écrit un nombre X de gommettes. Il y a Y gommettes déjà collées. L'émetteur A doit envoyer un message à un récepteur B. Le message doit indiquer le nombre de gommettes restant à coller. Il est précisé aux enfants que le message doit :

- être le plus court possible,
- ne comporter aucun mot,
- qu'il faut se servir des nombres écrits sur la feuille

A la fin de la séance, A devient récepteur et B émetteur. On change alors bien sûr les nombres X et Y.

B - Variable de la situation

Les enfants ayant auparavant travaillé sur des situations d'action, nous avions pu observer que la variable « grandeur des nombres » permettait de diminuer le nombre de procédures. Elle les oblige à utiliser des procédures canoniques, notamment celle par différence ou par complément.

Entre la première et la deuxième séquence, nous avons donc modifié la grandeur des couples (X et Y) ; soit (28,12) pour la première séquence et (58,21) pour la seconde.

Ces deux séquences ont eu lieu dans deux classes comprenant chacune 8 élèves.

C - Modèles de la situation

Modèles de base

L'émetteur doit comprendre :

- qu'il faut faire un message,
- que ce message doit être court,
- qu'il doit indiquer le nombre de gommettes restant à coller.

Le récepteur doit comprendre :

- qu'il faut aller chercher le nombre exact de gommettes

Modèle de résolution

L'émetteur peut utiliser :

- la procédure par complément : 6 + ... = 10
- la procédure par différence : 10 - 6 = ...
- la représentation : IIIIIIIII

Modèles de contrôle

Le récepteur pose ses gommettes et compte le nombre total.

S'il y a une erreur, la validation intervient.

- soit l'émetteur modifie son message à l'aide du récepteur,
- soit le récepteur s'est trompé et l'émetteur le lui indique.

D - Analyse des résultats Couple (28,12)

- Il n'y a pas eu de représentations dans les messages, cela peut tenir :

* soit à la consigne : « le message doit être court »

* soit à un progrès des enfants suite à l'apprentissage effectué auparavant

- Quatre enfants sur huit ne se sont pas trompés lors de la rédaction du message. Les procédures utilisées sont le complément et la différence. On notera que les récepteurs réalisent sans erreur l'opération, vont chercher leurs gommettes puis utilisent le dénombrement comme moyen de contrôle.

- Quatre enfants font des erreurs dans la rédaction du message.

Précisons leur erreur et la relation avec le récepteur.

* *Premier cas*

L'émetteur A écrit 12 + 28. Le récepteur B fait l'opération puis va chercher 40 gommettes. En les posant sur la feuille, il fait remarquer à A qu'il y en a bien trop. B a donc remarqué que le message ne correspondait pas à la consigne donnée à l'émetteur. B précise alors qu'il faut aller « jusqu'à 2 ». Après un temps d'hésitation, B écrit 16 puis note 12 + 16 = 28.

Nous avons donc dans ce cas une aide efficace de la part du récepteur.

Au couple (58,21), A ne fera plus d'erreur. Il a donc tiré des enseignements de sa relation avec l'autre.

* *Deuxième cas*

A écrit 8 x 2. Les enfants étudiaient la multiplication. Le message est correct mais il n'est pas compris du récepteur.

B rappelle alors la consigne. A écrit un autre message : 28 - 12.

B effectue l'opération. A et B contrôlent ensuite la validité du message en collant les gommettes puis en comptant le nombre total.

* *Troisième cas*

A écrit 12 + 28. B remarque qu'il n'en faut pas 40, mais 28.

A corrige et note 12 + ... = 28

Une fois de plus, l'émetteur aide le récepteur.

* *Quatrième cas*

Dans le cas (28,12), l'émetteur A écrit 16. Il apporte donc directement la réponse au récepteur. Celui-ci lui précise qu'il faut se servir des nombres écrits sur la feuille. L'émetteur A ne modifie pas sa stratégie mais au couple (58,21), il écrira 21 + ... = 58. Le récepteur lui a donc fait respecter la consigne.

On le voit, la rencontre avec le récepteur a permis des améliorations qui se sont confirmées par la suite.

Lors de la deuxième séquence, on a pu noter un net progrès. Les messages ont été corrects dès le premier essai. Lors des étapes ultérieures, on a pu observer des représentations qui ont disparues lorsque les couples mis en jeu étaient de plus grands nombres.

Cet apprentissage s'est prolongé par la suite en variant à chaque fois les situations.

Une évaluation a été enfin effectuée par les maîtres. Il s'agissait de répondre à des problèmes de composition d'états et de transformation d'états. Ces problèmes étaient à la fois additifs et soustractifs. L'ensemble des résultats a été jugé satisfaisant.

Tous les enfants s'investissent facilement dans les situations d'action et de formulation. Émetteurs et récepteurs tirent un bénéfice de leur échange. Cette méthode semble constituer une aide avant d'aborder les problèmes plus « traditionnels ».

Il y a le plus souvent peu d'échecs, ce qui contribue à valoriser les enfants tout en leur apportant de l'assurance. Cet aspect nous semble important en classe de perfectionnement.[7].

Dominique DESCHARLES

enseignant spécialisé en classe de perfectionnement

École P. et M. Curie

MÉRICOURT (62)

---

[7] Cet exemple est tiré de plusieurs séquences qui ont été expérimentées à l'occasion d'un mémoire CAEI, voir : DESCHARLES D., WLODARCZAK R., (1986). *Problèmes soustractifs et situations d'apprentissage*. Mémoire C.A.E.I., Option E. - Lille, École Normale.